

## APPLIED MATHEMATICS - III

Time : 2:30 Hours]

[Maximum Marks : 50

[Minimum Marks : 17

## NOTES:

- i) Attempt **all** questions.
- ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q1) Answer any ten parts of the following, from parts (i) to (v) select the correct choice.

[10 × 1 = 10]

- i) Rank of unit matrix of order 3 will be
  - (a) 3
  - (b) 2
  - (c) 1
  - (d) 0
- ii) If  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  then for what value of  $\alpha$ , A is an identify matrix
  - (a)  $\pi/2$
  - (b)  $\pi$
  - (c) 0
  - (d) 1
- iii) Find the differential equation representing the family of curves  $y = ae^{bx+5}$  where  $a$  and  $b$  are constants.
  - (a)  $\frac{d^2y}{dx^2} = y$
  - (b)  $\frac{d^2y}{dx^2} = b^2y$
  - (c)  $\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$
  - (d) None
- iv) The value of  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  equals
  - (a) 1
  - (b) 1/2
  - (c) 2
  - (d) None of these
- v) Words are formed with the letters of the word 'PEACE'. The probability that 2 E's come together is
  - (a) 2/5
  - (b) 3/5
  - (c) 1/5
  - (d) 4/5
- vi) If  $\vec{r} = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$ , find the value of  $\left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$ .
- vii) Find  $L[2 \sin 3t + 4e^{-2t}]$ .
- viii) Solve  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ .
- ix) Write mean and variance of Binomial distribution.
- x) If  $u = x^2, v = y^2$  find  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ .
- xi) If  $u = e^{xyz}$ , find the value of  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ .
- xii) Evaluate  $\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dx dy$ .

Q2) Answer any five parts of the following.

- i) For which value of 'b' the rank of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$  is 2.
- ii) If  $u = x^y$  show that  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$ .
- iii)  $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$
- iv) Find the inverse Laplace transform of  $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$ .
- v) A bag contains 10 white and 15 black balls. Two balls are drawn in succession what is the probability that first is white and second is black.
- vi) Solve the differential equation  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ .
- vii) A particle moves along the curve  $\vec{r} = (t^3 - 4t)\hat{i} + (t^2 + 4t)\hat{j} + (8t^2 - 3t^3)\hat{k}$ , where 't' is the time. Find the magnitude of the tangential components of its acceleration at  $t = 2$ .

Q3) Answer any two parts of the following.

[2 × 5 = 10]

- a) Show that the equations  $2x + 6y = -11$ ,  $6x + 20y - 6z = -3$ ,  $6y - 18z = -1$  are not consistent.
- b) If  $x^x y^y z^z = c$  show that at  $x = y = z$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$

- c) Solve  $(D^2 + y)y = \cos 2x$ .

Q4) Answer any two parts of the following.

[2 × 5 = 10]

- a) Examine the following vectors for linear dependence  $X_1 = (1, 2, 4)$ ,  $X_2 = (2, -1, 3)$ ,  $X_3 = (0, 1, 2)$ ,  $X_4 = (-3, 7, 2)$ .
- b) Evaluate  $\iiint_s (yz\hat{i} + zx\hat{j} + xy\hat{k}) \cdot ds$  where  $s$  is the surface of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  in the first octant.
- c) Find the Laplace transform of the function  
 $f(t) = t^2 \quad 0 < t < 2 \quad f(t+2) = f(t)$

Q5) Answer any two parts of the following.

[2 × 5 = 10]

- a) Find the Eigen value and the corresponding Eigen vectors of the matrix  $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ .

- b) Prove that  $\int_0^1 (x \log x)^4 dx = \frac{4!}{5^5}$ .

- c) A manufacturer knows that the condensers he makes contain on an average 1% of defectives. He packs them in boxes of 100. What is the probability that a box picked out at random will contain 4 or more faulty condensers.

नोट : i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

प्र.1) निम्नलिखित में से कोई दस भाग हल कीजिए। भाग (i) से (v) तक सही विकल्प चुनिये।

[10 × 1 = 10]

- i) तृतीय श्रेणी के एकांक आव्यूह की जाति होगी  
 (अ) 3 (ब) 2  
 (स) 1 (द) 0
- ii) यदि  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  तो  $\alpha$  का मान यदि A इकाई मैट्रिक्स है।  
 (अ)  $\pi/2$  (ब)  $\pi$   
 (स) 0 (द) 1
- iii) वक्र  $y = ae^{bx+5}$  को दर्शाने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ  $a$  एवं  $b$  स्थिर है।  
 (अ)  $\frac{d^2y}{dx^2} = y$  (ब)  $\frac{d^2y}{dx^2} = b^2y$   
 (स)  $\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$  (द) इनमें से कोई नहीं
- iv)  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  का मान बराबर है  
 (अ) 1 (ब) 1/2  
 (स) 2 (द) इनमें से कोई नहीं
- v) 'PEACE' शब्द के अक्षरों से शब्द बनाये जाते हैं 2 E के साथ आने की प्रायिकता है  
 (अ) 2/5 (ब) 3/5  
 (स) 1/5 (द) 4/5
- vi) यदि  $\vec{r} = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$ , तो  $\left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$  का मान ज्ञात कीजिए।
- vii) ज्ञात कीजिए  $L[2 \sin 3t + 4e^{-2t}]$ .
- viii) हल कीजिए  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ .
- ix) द्विपद बंटन का माध्य तथा प्रसरण लिखिए।
- x) यदि  $u = x^2, v = y^2$ ,  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  का मान ज्ञात कीजिए।
- xi) यदि  $u = e^{xyz}$ , तो  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$  का मान ज्ञात कीजिए।
- xii) मान ज्ञात कीजिए  $\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dx dy$ .

प्र.2) निम्नलिखित में से पाँच भाग हल कीजिए।

i) 'b' के किस मान के लिए आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$  की कोटि 2 है।

ii) यदि  $u = x^y$  दर्शाइये  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$ .

iii) हल कीजिए  $(1 + y^2)dx = (\tan^{-1} y - x)dy$

iv) प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए  $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$ .

v) एक थैले में 10 सफेद तथा 15 काली गेंदे हैं। दो गेंदे एक के बाद एक निकाली जाती है। पहली गेंद के सफेद तथा दूसरी के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

vi) निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ .

vii) एक कण वक्र  $\vec{r} = (t^3 - 4t)\hat{i} + (t^2 + 4t)\hat{j} + (8t^2 - 3t^3)\hat{k}$ , के पर चलता है जहाँ 't' समय है।  $t = 2$  पर वक्र के त्वरण के स्पर्शीय घटक ज्ञात कीजिए।

प्र.3) कोई दो भाग हल कीजिए।

[2 × 5 = 10]

अ) दर्शाइये कि समीकरण  $2x + 6y = -11$ ,  $6x + 20y - 6z = -3$ ,  $6y - 18z = -1$  संगत नहीं है।

ब) यदि  $x^x y^y z^z = c$  दर्शाइए कि यदि  $x = y = z$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$

स) हल कीजिए  $(D^2 + y)y = \cos 2x$

प्र.4) कोई दो भाग हल कीजिए।

[2 × 5 = 10]

अ) रैखिक निर्भरता का परीक्षण कीजिए।

$$X_1 = (1, 2, 4), X_2 = (2, -1, 3), X_3 = (0, 1, 2), X_4 = (-3, 7, 2)$$

ब) मान ज्ञात कीजिए  $\iint_S (yzi + zyj + xyk) \cdot ds$  जहाँ S गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  का प्रथम अष्टांश में समतल है।

स) निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए।

$$f(t) = t^2 \quad 0 < t < 2 \quad f(t+2) = f(t)$$

प्र.5) निम्नलिखित में से दो भाग हल कीजिए।

[2 × 5 = 10]

अ) निम्नलिखित मैट्रिक्स की आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ब) सिद्ध कीजिए  $\int_0^1 (x \log x)^4 dx = \frac{4!}{5^5}$

स) कंडेंसर के निर्माता द्वारा निर्मित माल में से 1% खराब है, निर्माता 100 के पैकेट बनाता है, एक पैकेट में 4 या अधिक कंडेंसर के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

